I. DERET TAKHINGGA, DERET PANGKAT

1.1 Pendahuluan

Pembahasan tentang deret takhingga sebagai bentuk penjumlahan suku-suku takhingga memegang peranan penting dalam fisika. Pada bab ini akan dibahas mengenai pengertian deret dan aplikasinya dalam fisika. Banyak fenomena fisis yang terjadi membutuhkan deret sebagai solusinya, misalnya dalam menyelesaikan masalah bandul sederhana. Selain itu, melalui deret juga dapat memperoleh nilai-nilai numerik untuk bilangan e , π , $\sqrt{2}$, dan sebagainya. Deret takhingga juga bermanfaat untuk perhitungan integral, menyelesaikan persamaan diferensial (baik biasa maupun parsial), deret Fourier, dan sebagainya.

1.2 Barisan dan Deret

Barisan adalah urutan suku-suku yang dibentuk mengikuti aturan atau kaidah yang telah ditetapkan. Sebagai contoh,

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}, \dots$$

Suku ke- n sebuah barisan dinyatakan dengan a_n . Suku ke- n ini menunjukkan aturan pembentukan suku-suku deret itu. Pada contoh di atas, suku ke- n berturut-turut adalah n^2 dan $n/3^n$.

Deret adalah pernyataan penjumlahan yang ditunjukkan oleh suku-suku barisan. Berdasarkan barisan di atas diperoleh deret

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots \text{ dan } \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots$$

Jika jumlah suku-sukunya terbatas, barisan atau deret disebut berhingga. Sebaliknya, jika jumlah suku-sukunya tak terbatas, barisan atau deret itu dinamakan barisan atau deret takhingga. Penulisan deret takhingga biasanya digunakan notasi sigma, misalnya:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2.$$

Atau secara umum dapat disimbolkan

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1.1)$$

1.3 Deret Geometri

Deret geometri didefinisikan sebagai

$$a + ar + ar^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}. \quad (1.2)$$

Sebagai contoh :

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Jumlah n suku pertama dapat dihitung dengan rumus $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Contoh:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \quad (1.3)$$

Jumlah deret geometris menurut definisinya

$$S = \lim_{x \rightarrow \infty} S_n \quad (1.4)$$

Dimana S_n , adalah jumlah suku ke- n dari deret.

1.4 Definisi dan Notasi Deret Tak hingga

Ada banyak deret tak hingga lainnya selain deret geometris, sebagai contoh:

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots$ (1.5a)

2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$ (1.5b)

3. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \dots$ (1.5c)

Secara umum, deret tak hingga di definisikan sebagai

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots, \quad (1.6)$$

Dimana a_n (satu untuk setiap bilangan bulat positif n) adalah bilangan atau fungsi yang diberikan oleh beberapa formula atau aturan. Sehingga deret (1.5a), (1.5c) dapat dinyatakan dengan notasi sigma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \quad (1.7a)$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(n-1)!} \quad (1.7b)$$

Dari semua contoh tersebut, kita ingin menentukan limit deret tersebut $n \rightarrow \infty$, (jika deret tersebut memiliki limit).

Contoh:

Tentukan limit $n \rightarrow \infty$ dari deret

$$\frac{(2n-1)^4 + \sqrt{1+9n^8}}{1-n^3-7n^4}$$

Penyelesaian:

Kita bagi bilangan dan penyebut oleh n^4 dan hitung limit $n \rightarrow \infty$, sehingga semua nilai menjadi nol kecuali

$$\frac{2^4 + \sqrt{9}}{-7} = -\frac{19}{7}$$

1.5 Deret Divergen dan Deret Konvergen

Kita akan membahas deret berikut:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (1.8)$$

Penjumlahan beberapa suku pertama akan menghasilkan hal-hal berikut:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \quad (1.9)$$

Besaran S_n disebut jumlah per bagian, yaitu jumlah n suku pertama deret. Harga limit dari S_n adalah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (1.10)$$

a. Jika jumlah per bagian S_n dari deret takhingga cenderung menuju harga tertentu, yaitu S , maka deretnya disebut konvergen. Sebaliknya, deret divergen.

- b. Harga S disebut jumlah deret.
 c. Ada nilai sisa, yaitu $R_n = S - S_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0 \quad (1.11)$$

1.6 Aplikasi Deret

Banyak aplikasi deret tak hingga yang akan digunakan pada bab berikutnya. Kita akan melihat bagaimana kita dapat menggunakan deret pangkat (yaitu deret yang memiliki pangkat x) untuk memberi makna pada fungsi bilangan kompleks, dan bagaimana mendefinisikan fungsi dari matriks dengan menggunakan fungsi deret pangkat. Dan juga deret pangkat hanyalah contoh pertama dari deret tak hingga. Selanjutnya kita akan belajar tentang deret Fourier (yang istilahnya adalah sinus dan kosinus). Setelah itu, kita akan menggunakan deret pangkat untuk memecahkan persamaan diferensial, dan kita akan membahas deret lain seperti Legendre dan Bessel. Akhirnya, kita akan menemukan bagaimana sebuah studi tentang deret pangkat menjelaskan pemahaman kita tentang fungsi matematika yang kita gunakan dalam aplikasi.

1.7 Uji Konvergensi

1. Uji Awal (*preliminary test*) menyatakan, jika $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, deret divergen.

Adapun syarat uji biasa yaitu :

- Jika $a_n = 0$ maka harus dilakukan tes atau pengujian lebih lanjut,
- Jika $a_n \neq 0$ maka sudah pasti dikatakan sebagai deret divergen

Contoh :

$$\begin{aligned} \text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5-n^3} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{5-n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{5-n^3}{n^3}} = \frac{0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

Karena $a_n = 0$ Maka dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan deret konvergen/divergen harus digunakan tes lebih lanjut atau uji yang lainnya

$$\text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+3}}{(n-1)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+n+3}{n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$$

Karna $a_n \neq 0$ maka dinamakan deret divergen

2. Uji Banding

Jika suku demi suku dari deret $u_n \leq a_n$, dengan a_n adalah deret konvergen, maka deret u_n juga konvergen. Jika suku demi suku deret $v_n \geq b_n$, dengan b_n membentuk deret divergen, maka deret v_n juga divergen.

Syarat :

Jika $0 \leq a_n \leq b_n$, untuk semua nilai n

- Jika $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen
- Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ juga divergen

Contoh :

Uji deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$ yang konvergen dengan uji banding, gunakan sebagai deret pembanding $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ yang merupakan deret konvergen

N	n!	2^n	$\frac{1}{n!}$		$\frac{1}{2^n}$
1	1	2	1	>	$\frac{1}{2}$
2	2	4	$\frac{1}{2}$	>	$\frac{1}{4}$
3	6	8	$\frac{1}{6}$	>	$\frac{1}{8}$
4	24	16	$\frac{1}{24}$	<	$\frac{1}{16}$
5	120	32	$\frac{1}{120}$	<	$\frac{1}{32}$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} \quad \text{untuk } n > 3$$

Maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergen

3. Uji Integral

$$I = \int^{\infty} a_n dn = \begin{cases} \text{takberhingga, deret divergen} \\ \text{berhingga, deret konvergen} \end{cases} \quad (1.12)$$

Contoh:

Uji konvergensi dari deret harmonik berikut

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

dengan menggunakan tes integral maka,

$$\int a_n dn = \int \frac{1}{n} dn = \ln n]^\infty = \infty$$

Oleh karena integral tersebut takberhingga, maka deret tersebut adalah deret divergen.

4. Uji Nisbah

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (1.13)$$

Jika $\rho < 1$, deret konvergen

Jika $\rho > 1$, deret divergen

Jika $\rho = 1$, Gunakan tes lain

Contoh 1.

Tinjau $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dengan $a_n = \frac{1}{n!}$ Dan $a_{n+1} = \frac{1}{n!(n+1)}$, maka berdasarkan uji rasio diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$. Sehingga dengan demikian berdasarkan uji rasio deret tersebut deret ini adalah deret konvergen,

Hal tersebut diatas penjelasannya adalah :

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

dengan menggunakan (1) maka

$$\begin{aligned} \rho_n &= \left[\frac{1}{(n+1)!} \div \frac{1}{n!} \right] \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{(n+1)(n)(n-1)\dots 3.2.1} = \frac{1}{n+1} \\ \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Dengan $\rho < 1$, maka deret ini dikatakan deret konvergen

Contoh 2

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} &= \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \div \frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} \\
&= 2 \times \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \\
&= \frac{2n^2}{n^2 + 2n + 1}
\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1
\end{aligned}$$

Karena $\rho = 1$ maka menggunakan tes lain.

Contoh 3

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = \\
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{3^n}{n!} \\
&= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n} \\
&= \frac{3^{(n+1)}}{3^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \\
&= 3 \times \frac{1 \cdot 2 \dots n}{1 \cdot 2 \dots n(n+1)} \\
&= \frac{3}{n+1}
\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Karena $\rho < 1$ maka deret ini adalah deret konvergen

5. Uji Banding Khusus

Ditinjau deret positif $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- Jika deret positif $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.
- Jika deret positif $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergen dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{d_n} > 0$, deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Deret Bolak-balik (*Alternating Series*)

Deret bolak-balik adalah deret yang suku-sukunya berganti tanda. Sebagai contoh,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Deret bolak-balik $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, dengan a_n positif, konvergen jika memenuhi dua syarat berikut:

- Setiap suku-suku deret ini secara numerik kurang dari suku-suku sebelumnya, $|a_{n+1}| < |a_n|$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

Deret Pangkat

Secara umum, deret pangkat dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots,$$

dengan a adalah tetapan yang (boleh) bernilai nol dan a_n disebut koefisien deret pangkat.

Sebagai contoh,

- $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \dots + \frac{(-x)^n}{2^n}$
- $1 - \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{4} - \dots + \frac{(-(x-1))^n}{2^n}$

Sebuah fungsi $f(x)$ dapat dikembangkan ke dalam deret Taylor dengan menggunakan rumus

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Jika $a = 0$, uraian deret Taylor berubah menjadi deret Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Beberapa deret Maclaurin dari fungsi dasar yang sering digunakan dalam fisika adalah

$$1) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$2) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$3) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$4) \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$5) (1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \dots \text{ (deret binomial Newton)}$$

Dengan menggunakan beberapa deret fungsi dasar di atas, kita dapat memperoleh deret dengan mudah. Perhatikan beberapa contoh berikut:

$$1) f(x) = e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = 1 + x - \frac{x^3}{3} \dots$$

$$2) f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$